Students t-fordeling

# Beregning af frekvensfunktion

For at beregne frekvensfunktionen for t-fordelingen får vi brug for nogle resultater om frekvensfunktioner. Først et lemma:

**Lemma**: Lad være kontinuert, differentiabel og et tal. Da gælder:

Bevis: Da er kontinuert har den en stamfunktion . Så integralet er:

Differentier nu efter (brug kædereglen):

Bevis slut.

Lemmaet er ofte brugbart når man skal finde formler for frekvensfunktioner. F.eks. følgende:

**Sætning**: Lad og være kontinuerte, stokastiske variable med fælles frekvensfunktion og et naturligt tal. Da har den stokastiske variabel frekvensfunktionen (under ”lette regularistionsantagelser”):

Bevis: Fordelingsfunktionen beskriver sandsynligheden for at antager en værdi mindre end eller lig med :

Hvis er givet betyder betingelsen kan betingelsen løses for : . Derfor er fordelingsfunktionen:

Under den ”lette regularisationsantagelse” af, at differentation kan flyttes ind under integraltegnet giver ovenstående lemma:

Bevis slut.

**Korollar**: Hvis og er uafhængige med fordelingsfunktioner og bliver fordelingsfunktionen for :

# Students t-fordeling

**Definition**: Lad og være uafhængige så er standardnormalfordelt og -fordelt med frihedsgrader. Da kaldes fordelingen af den stokastiske variabel for t-fordelingen med frihedsgrader.

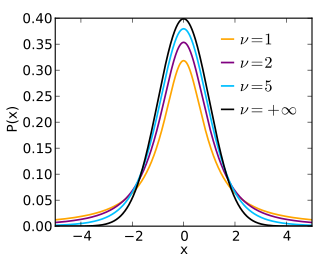
Sætning: Frekvensfunktionen for t-fordelingen med frihedsgrader er:

Bevis: Vi kan anvende sætningen fra sidste sektion. Frekvensfunktionerne for og er:

Dermed bliver fordelingsfunktionen:

Substituer nu . Det medfører og derfor . Så . Integralet bliver dermed:

Dette -integral er netop . Så i alt bliver frekvensfunktionen:

Bevis slut.

Figuren til højre viser fordelingen for forskellige antal af frihedsgrader.

## – Cauchy-fordelingen

Når får man:

Her er benyttet. Dette er netop frekvensfunktionen for en Cauchy-fordeling.

## stor - Normalfordelingen

Som vokser ligner t-fordelingen standardnormalfordelingen mere og mere.

# Stikprøve med ukendt varians

t-fordelingen er først og fremmest vigtig pga. følgende sætning:

**Sætning**: Lad være uafhængige med samme fordeling , men hvor hverken middelværdi eller varians er kendte størrelser. Betragt følgende estimatorer:

Da er og og de to er uafhængige. er t-fordelt: .

Bevis: Da er ifølge de sædvanlige egenskaber ved normalfordelingen. Derfor er . For at vise den anden fordeling transformeres -erne til . Alle ’er standardnormalfordelte: . Da ’erne og dermed også ’erne er uafhængige er derfor en -dimensional standardnormalfordeling. Sæt nu til en vektor i dimensioner. Dette er en enhedsvektor. Suppler nu op til en ortonormalbasis for . Saml disse vektorer i en ortogonal matrix . Ifølge den affine transformationsegenskab for multidimensionale normale fordelinger er også standardnormalfordelt i dimensioner. Specielt betyder det:

Regn nu:

Så derfor er:

Regn nu:

Dette er en sum kvadraterne på uafhængige standardnormalfordelinger. Størrelsen er altså -fordelt. Eller sagt på en anden måde: . Da kan udtrykkes vha. og vha. er de to uafhængige. Hvilket bliver vigtigt når vi ser på :

Tælleren er altså standardnormalfordelt, mens nævneren er fordelt som . Altså er hele størrelsen t-fordelt med frihedsgrader. Bevis slut.